Proyecto Clepsidra: Agua, Matemáticas y Tiempo

"Saber no es suficiente, debemos aplicar.
Desear no es suficiente, debemos hacer."
Johann W. Von Goethe, 1749-1832

Carlos Morales Socorro
cmorsoc@gobiernodecanarias.org

1. Objetivos, Contenidos y Justificación Metodológica

Este trabajo se corresponde con la Unidad "**Proyecto Clepsidra: Agua, Matemáticas y Tiempo**", englobada dentro de la Programación "alternativa" de Matemáticas de **4º E.S.O. - Opción B** de nuestro centro : (I) Proyecto MCEA, (II) Proyecto Tunguska, **(III) Proyecto Clepsidra**, (IV) Proyecto ViruX, (V) Proyecto TopoGIC y (VI) Unidad Fussion (para los aspectos más teóricos del currículo oficial no trabajados en ningún proyecto, como Radicales). Además, cada año, adecúo la Programación para intercambiar algunas unidades con otras complementarias: Proyecto CannonBasket, Proyecto Indiana, Proyecto Cortocircuito, Proyecto F1 y Proyecto AgroMAT.

Sus **objetivos** fundamentales son:

- Modelar matemáticamente un fenómeno físico real: Vaciado de un depósito lleno de agua al que se le ha practicado un orificio en la pared lateral, cerca de la base. Acercando al alumnado, de esta forma, a los procesos propios de la actividad **científica** (sigue un modelo cuadrático) .
- Aplicar los conocimientos adquiridos en la fase anterior en una actividad propia de la **ingeniería**: Construir un reloj de agua, lo más exacto posible. ¡Clepsidra!

Los **contenidos** abordados son: manipulación de fórmulas matemáticas, volumen y área de cuerpos geométricos, introducción al método científico, recogida de datos en tablas, medias, desviaciones típicas, errores absolutos y relativos, sistemas de ecuaciones 2x2 y 3x3, ecuaciones de segundo grado, funciones cuadráticas, funciones racionales, límites con indeterminación INF/INF (no presente en los contenidos iniciales, surgió de forma natural durante la ejecución del proyecto), estimación mediante modelos, tasa de variación media, software de cálculo simbólico (**Maxima** [http://maxima.sourceforge.net/es]), hojas de cálculo (**OpenOffice** [http://es.openoffice.org]), software de edición de código **LaTeX**, **LyX** [http://www.lyx.org], porcentajes, ...

Y ha sido llevado a cabo en el aula/clase **GNU/Linux-LTSP** de 4ºE.S.O.-A y apoyado digitalmente con un curso virtual **Moodle** [Vídeo informativo de la Plataforma: http://es.youtube.com/watch?v=fwlkTXoKh_s]. Los **resultados formales y no formales** han sido excelentes: los chicos/as se sienten científicos/as, ingenieros/as, a la vez que adquieren una visión global del poder de la Matemática... Sentimientos que se ven reforzados con la realización de otros proyectos como Tunguska, donde el alumnado acompaña, en una aventura guiada, a Paula -Licenciada en Ciencias Físicas- en una lucha titánica por destruir a un meteorito que se acerca peligrosamente a la Tierra.

Las **competencias básicas** desarrolladas son: competencia en **comunicación lingüística**, competencia **matemática**, competencia en el **conocimiento y la interacción con el mundo físico**, **tratamiento de la información y competencia digital**, competencia **social y ciudadana** y la competencia para **aprender a aprender** y **autonomía e iniciativa personal**.

Quizás, antes de empezar a recorrer en profundidad el proyecto en sí mismo, y a modo de justificación y génesis metodológica, debería explicar los motivos por los que decidí, hace ya unos años, migrar progresivamente hacia un enfoque de aprendizaje/enseñanza de las matemáticas radicalmente distinto al usado inicialmente (por imitación e inercia): Lo primero es decir que el siguiente lema me ha marcado profundamente como profesional de la enseñanza y como persona: **"Saber no es suficiente, debemos aplicar. Desear no es suficiente, debemos hacer.", de Johann W. Von Goethe, 1749-1832**. Lo siguiente es describirme a mí mismo hace unos 8 años:

- Trabajaba con temas (aunque los llamaba, incorrectamente, unidades didácticas), sin relacionar e integrar conocimientos.
- Abusaba de la resolución de ejercicios porque temía trabajar con problemas, ya que el alumnado no entendía lo que leía.
- No aplicaba las matemáticas a la realidad... ¿Y para qué sirve esto, profe?
- No usaba las TIC adecuadamente. Simplemente las usaba.
- Me gustaba trabajar con el alumnado, pero... me aburría con lo que hacía. Algo no iba bien. No me sentía realizado.
- Me encantaba aprender... de todo y de todos.

Ante esta situación, y con el transcurso de los años, se hicieron claras varias ideas... Lo importante era responder a esta pregunta:

¿Cómo puedo mejorar como docente?

- Las TIC no son la solución, pero pueden ayudar si las usamos adecuadamente. Todos sabemos que el mero hecho de incluir TIC en el aula no da garantías de NADA. Incluso, puede llegar a empeorar los procesos de aprendizaje de nuestro alumnado si lo hacemos de forma no reflexiva. Destacan algunas herramientas: **Moodle**, **Maxima/SAGE** y **OpenOffice**. Sin olvidar a **Descartes**, **Jclic**, **Flash**, **Geogebra**, ...

- Transmitir información no es lo mismo que enseñar. Y entender no es lo mismo que aprender. El mayor error que se puede cometer es hacer hincapié en la transmisión de la información y dejar el trabajo del alumnado para sus casas... El alumnado debe “hacer”, cometer errores y comentar (debatir) el proceso y la solución. ¿Les doy tiempo a cometer errores o más bien tiendo a evitar constantemente que se caigan al vacío? Uno no aprende a correr si no se cae... ¿Existe un método eficaz que permita al alumnado comentar y debatir el proceso y la solución de un problema? No, si sólo contamos con los recursos tradicionales... ¡Pero las TIC SON la llave! Ya lo veremos a lo largo del proyecto... ¡Bienvenidos sean los **Foros**, los **Blogs** y las **Wikis**! ¡Son unas herramientas valiosísimas! Clave.
- La Matemática es muy útil... ¡Es la Reina de las Ciencias! Pero el alumnado no lo sabe... ¿Deben tener FE , o se lo demostramos día a día? ¿FE? ¿¡FE!? ¡Hay que demostrarlo! Y eso no se hace ni con “ejercicios rutinarios” ni contándoles que para aplicar tal o cual herramienta matemática hay que esperar a cursos superiores o a la Universidad... Después de todo, puede que allí les digan lo mismo.
- El alumnado debe aprender a **usar** y a **identificar** las herramientas matemáticas necesarias para resolver un problema determinado... La metodología tradicional (organizada por temas o falsas Unidades Didácticas) no da importancia a la IDENTIFICACIÓN de las herramientas... sólo a usarlas... y de forma mecánica, en muchos casos. ¿Cómo va a aprender el alumnado a saber cuándo usar un sistema de ecuaciones con una unidad donde sólo hay sistemas de ecuaciones? Como mucho pueden llegar a aprender que se pueden emplear en diversos contextos, pero no a identificar cuándo usarlos ni cómo insertarlos en un plan maestro que resuelva un problema global y REAL. Duro, pero cierto.
- ¿Y qué me dicen de la **Atención a la Diversidad**? Sí, las TIC tienen mucho que decir:
    - **Vídeos** que explican procedimientos matemáticos [http://mediateca.educa.madrid.org] o [http://matematicasies.com] y que sin llegar a ser una “clase particular”, pueden ser de gran ayuda para afianzar ciertas rutinas.

    - **Cuestionarios Moodle** de distintos grados de complejidad (con preguntas de relleno de huecos, opción múltiple, respuesta corta, ...) que pueden ser resueltos por el alumnado a cualquier hora, cuantas veces lo necesite... Más aún, al ritmo de cada uno (sin olvidar que la Plataforma los corrige automáticamente). Por otro lado, podemos usar las estadísticas del sistema para identificar puntos especialmente conflictivos o para tener una panorámica del proceso de aprendizaje de nuestros chicos/as.
    - **Foros Moodle**, donde debatir las soluciones de los problemas o tareas del proyecto (usando **LATEX** [Vídeo sobre cómo integrar LATEX en Moodle: http://es.youtube.com/watch?v=Lk7Oz4BQKd0])... y que constituyen una base de datos de problemas resueltos por el alumnado que puede ser consultada en cualquier momento (y donde se pueden observar tanto las soluciones correctas como las incorrectas, que también son importantes)... Le dedicaremos más tiempo a este apartado, porque es, sin duda, una de esas aportaciones de las TIC que pueden inyectar auténticas mejoras significativas a nuestros trabajos de aula... El lector se podría estar preguntando, a estas alturas, cómo montar un curso Moodle... Pues tengo el placer de decirles que hay un **servidor**

Moodle gratuito: www.campus-virtual.es. En cuanto al cómo empezar, podemos encontrar muchos **vídeos gratuitos** en [http://www.sre.urv.es/moodleviewlets]... Además, no es muy difícil encontrar CEPs que organicen cursos al respecto. Ánimo, merece la pena, más que ninguna otra herramienta TIC (¡y he usado muchas!).

- **Wikis Moodle,** donde construir colaborativamente el conocimiento.
- **Software Libre Específico de la materia**, como Maxima, SAGE, Scilab, Yacas, R, ... que permiten tanto comprobar resultados como obtener panorámicas generales de un problema o situación con mucha facilidad ... Podemos ver un ejemplo perfecto de su uso integrado con Moodle en:

  http://www.campus-virtual.es/mod/forum/discuss.php?d=131
- Herramientas metodológicas como las **Técnicas de Trabajo Cooperativo**... **Roles**... ¡Qué maravilla!
- ...

Las cosas no podían seguir así, no me sentía bien ni como persona ni como profesional. Así que mi cabeza avanzó en paralelo con dos núcleos distintos aunque interrelacionados: **¿Cómo pueden ayudar las TIC? ¿Qué metodología puedo usar?**

El primer punto prácticamente ha sido esbozado en los párrafos anteriores y será explicado con ejemplos reales a lo largo de este trabajo. Pero la pregunta clave era: **¿Cómo puedo replantear el proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas para mejorar la actitud del alumnado hacia la materia, los resultados académicos y la satisfacción docente?**

Antes de continuar, hay que destacar que todas las reflexiones y conclusiones mostradas a continuación son fruto de un análisis crítico y personal, llevado a cabo con un único objetivo: MEJORAR mi acción docente y compartirlo con todos/as... sin ánimo de pretender identificar verdades absolutas.

Lógicamente, el primer paso que debía dar era migrar hacia una metodología centrada en la resolución de problemas, más que en la repetición mecánica de ejercicios. La cuestión es que hay dos filosofías generales bastante diferenciadas:

- **Método A**: **Fijar el tema o bloque de contenido específico y luego buscar aplicaciones**

  Ventajas:
  - Sensación de orden: primero aritmética, luego un poco de álgebra, ...
  - Hay mucho material disponible (libros de texto) y es una práctica establecida (cristalizada) entre el profesorado.

  Desventajas:
  - Se corre el riesgo de profundizar en exceso en determinados bloques (abandonando otros como probabilidad, estadística y geometría). Sin comentarios.
  - No se aprende a identificar las herramientas matemáticas a usar, sólo a usarlas de forma aislada.
  - No es realista, ya que proyecta la falsa sensación de que los problemas reales se resuelven con una o dos herramientas matemáticas. No hay visión global.
  - No se aprecian ni la POTENCIA de las Matemáticas ni los fuertes lazos que tiene con el resto de las Ciencias. No hay situaciones complejas con entidad propia, ni ningún hilo conductor, sólo problemas aislados cuyo mecanismo de resolución, además, se suele conocer a priori.

- **Método B**: **Elegir una situación problemática <u>real</u> o <u>simulada</u> y <u>resolverla</u> o <u>analizarla</u> aplicando, de forma coordinada, múltiples herramientas matemáticas de diferentes bloques de contenido**

  Ventajas:

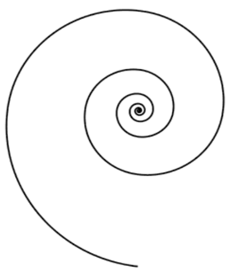
  - ¡Exploración del currículo en espiral! De un curso a otro y de una unidad a la siguiente.
  - Mayor satisfacción docente y mayor implicación del alumnado... Ven La Matemática como una disciplina realmente útil y aprecian mejor sus interrelaciones. Elaboran planes y aumentan la confianza en sí mismos.
  - Integración natural de las TIC, del trabajo cooperativo y del desarrollo de las competencias básicas (de todas).
  - Se aprende tanto a **elegir** como a **usar** las herramientas matemáticas, las cuales se emplean de forma coordinada y continua. Hay visión global de las Ciencias, la Tecnología y la Matemática. ¡El trabajo interdisciplinar está servido!

  Desventajas:

  - Escaso material disponible (casi inexistente) y sensación absoluta de soledad. Hay poca gente trabajando mediante proyectos (guiados o no).
  - Sensación **inicial** de "complejidad brutal" entre el alumnado. Si ya pasar de ejercicios a problemas es complejo, pasar de problemas identificados a SITUACIONES problemáticas... Al principio hay que animarles mucho.
  - Programación como secuencia de proyectos (aparentemente más complejo). Diseñar el primer proyecto es complicado, ¡diseñar el cuarto es coser y cantar!

Siempre he sido muy curioso... Siempre me ha gustado aprender... ¡¿Y por qué no?! Pronto convencí a mis compañeros/as para empezar a inyectar proyectos en la Programación tradicional del Departamento, empezando así con un enfoque híbrido... hasta hoy. Ahora sólo resta la parte final: ¿Y si difundimos el trabajo realizado? Esta es la primera vez que lo hago con un ejemplo completo. ¡Juntos podemos hacer algo grande! Espero que les guste...

Proyecto Clepsidra



2. Sobre la Organización del Material

Ahora que hemos decidido trabajar con Unidades/Proyectos, debemos preparar al alumnado para hacer frente a semejante aventura. El material del alumno/a constará de una carpeta con tres secciones principales:

1. **Currículo oficial de la materia y otros documentos de interés (consejos de estudio, criterios de evaluación,...)**
2. **Fundamentos teóricos**, donde se organizan los procedimientos y conceptos de la materia por bloques de contenido: Aritmética, Álgebra, Análisis, Geometría, Estadística, Probabilidad, Estrategias y Software Matemático. Dicho material se proporcionará durante el curso, conforme vaya siendo necesario, aunque algunos contenidos serán elaborados por los propios chicos/as. Para cada apartado es común encontrar las correspondientes definiciones teóricas y un conjunto mínimo y claro de ejemplos (aplicados). <u>Hay que resaltar, por tanto, que dicha sección será consultada a lo largo del curso en la medida en que sea necesaria para resolver las tareas y actividades de los Proyectos</u>.
3. **Secuencia de Proyectos/Unidades**, donde se almacenan cada uno de los proyectos con sus correspondientes tareas y actividades. Además, se proporciona una **Ficha de Seguimiento Curricular de la Unidad/Proyecto**, la cual <u>será rellenada por el alumnado conforme vaya avanzando en el proyecto, explicitando tanto los aspectos usados o aplicados (que ya conocía) como los aprendidos durante el proyecto</u>. **<u>¿Se nota mucho la influencia del Portfolio, del Marco Europeo de las Lenguas?</u>** Durante el proyecto, se dispondrá de una **wiki Moodle** [Vídeo explicativo: http://www.youtube.com/watch?v=jIgk8v74IZg], para que el alumnado pueda crear la ficha de forma colaborativa.

I.E.S. -----------	**Departamento de Matemáticas**
Ficha de Seguimiento Curricular de la Unidad	
Matemáticas 4º E.S.O. Opción B	**Prof.: ------ ------- --------**

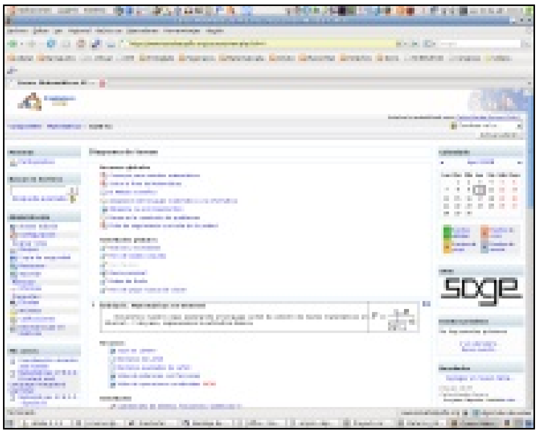
Proyecto Clepsidra

¿Qué estoy aplicando? ¿Qué estoy aprendiendo?

Área / Bloque	**Aspectos trabajados**
Aritmética	
Álgebra	
Análisis (Funciones)	

Geometría	
Estadística	
Probabilidad	
Estrategias	
Software Matemático	

En cuanto al **apoyo virtual**, se dispondrá de un espacio web, en el servidor Moodle, para cada uno de los Proyectos, así como un espacio dedicado a los Fundamentos Teóricos (con enlaces seleccionados a páginas web, actividades FLASH, JClic, Descartes, vídeos de refuerzo, cuestionarios Moodle, etc, ...). **Citar que aunque empecé usando Blogs, migré rápidamente a un curso Moodle, ya que éste, además de proporcionar la funcionalidad de estos, permite realizar otro tipo de actividades, así como organizar los contenidos de una forma mucho más adecuada.**



3. Desarrollo del Proyecto

Proyecto Clepsidra: Agua, Matemáticas y Tiempo

OBJETIVO: ¿Preparado/a para actuar como un científico/a? Te va a encantar. En este proyecto vamos a analizar un fenómeno real y a construir un modelo matemático que nos dé una aproximación de su comportamiento, aprendiendo un montón en el camino, y, de paso, construyendo un pequeño reloj de agua. ¡Clepsidra!

*Los **relojes de agua** o **clepsidras** datan de la antigüedad egipcia y se usaban especialmente durante la noche, cuando los relojes de sol perdían su utilidad. Los primeros relojes de agua consistieron en una vasija cerámica que contenía agua hasta cierto nivel, con un orificio en la base de un tamaño adecuado para asegurar la salida del líquido a una velocidad determinada y, por lo tanto, en un tiempo prefijado. El recipiente disponía en su interior de varias marcas de tal suerte que el nivel de agua indicaba los diferentes periodos, tanto diarios como nocturnos. Los relojes de agua también se usaron en los tribunales atenienses para señalar el tiempo asignado a los oradores. Cuentan que el filósofo Platón inventó un reloj de agua muy eficiente. Más tarde fueron introducidos en los tribunales de Roma, con el mismo fin. Además, se usaban en las campañas militares para señalar las guardias nocturnas. El reloj de agua egipcio, más o menos modificado, siguió siendo el instrumento más eficiente para medir el tiempo durante muchos siglos. Gracias a su estudio durante esa época se pudieron hacer nuevos avances en los relojes (Fuente: Wikipedia)*

CONTENIDOS: Manipulación de fórmulas matemáticas, volumen y área de cuerpos geométricos, introducción al método científico, recogida de datos en tablas, medias, desviaciones típicas, errores absolutos y relativos, sistemas de ecuaciones 2x2 y 3x3, ecuaciones de segundo grado, funciones cuadráticas, funciones racionales, estimación mediante modelos, software de cálculo simbólico, hojas de cálculo, resolución de problemas, porcentajes, ... ¡A disfrutar!

FASE 1: Érase una vez un cilindro de plástico... Antes de empezar nuestra labor científica, nos familiarizaremos con el objeto bajo estudio.

(Se formarán grupos de 3 personas de tal forma que cada uno de ellos tenga un **depósito**, una **regla** de 30 centímetros y una **cinta métrica**)

Antes de empezar, recuerda los pasos para resolver un problema:

- **Paso 1**: Lee atentamente el enunciado. Asegúrate de que lo entiendes.
- **Paso 2**: Identifica los datos que te dan. ¿Te falta alguno? ¿Te sobra alguno?
- **Paso 3**: Identifica las variables desconocidas. Puede haber varias.
- **Paso 4**: ¿Existe alguna relación entre los datos y las variables desconocidas? Escríbela. Traza un plan que te permita llegar a los valores de las variables desconocidas (gráficos, fórmulas, ecuaciones,

sistemas, operaciones, ...).

- **Paso 5**: Realiza los cálculos necesarios y comenta cada uno de los pasos que hayas dado.
- **Paso 6:** Redacta un pequeño informe o comentario sobre la solución del problema. Cuidado porque un problema puede tener solución matemática y no tener solución real...
- **Paso 7**: Comprueba los cálculos y los resultados. ¿Se te ocurre otra forma de resolverlo?

P1) Observa atentamente el envase que te ha dado tu profesor/a:

a) Averigua, usando una **regla** y una **cinta métrica**, su capacidad en litros. Redacta un pequeño informe (de grupo) explicando el proceso seguido y las dificultades encontradas.

Plantilla Título: ... Objetivo: Averiguar, usando una regla y una cinta métrica (opcional), la capacidad, en litros, de un envase proporcionado por el profesor/a. Proceso seguido: ... Dificultades encontradas: ... Autores: ...

b) Demuestra que PI es aproximadamente 3.1. Imagina que no lo sabes, ¿cómo puedes aproximar su valor?

c) Calcula la superficie lateral del depósito y construye, en cartulina, el desarrollo plano del cilindro bajo estudio.

COMENTARIO: Los grupos se configuran de forma equilibrada... Se nombra a un **moderador/a** de grupo encargado de controlar el turno de palabra, el nivel de ruido, ... y a un **portavoz**, encargado/a de comunicar las dudas, que no puedan ser resueltas por el grupo, al coordinador/a general de la clase (el profesor/a). El rol de **comprobador/a** se asigna a los tres miembros: ¿Lo estamos haciendo bien? ¿Por qué? ¿No se nos escapa nada? ¿Lo estamos explicando adecuadamente? ...

Eso de medir en clase, trabajar en grupo e investigar por su cuenta, les encanta. Que no se acuerdan de la fórmula de la longitud de una circunferencia o del volumen de un cilindro, pues lo buscan en Internet o en la parte de fundamentos teóricos...

Además redactan el informe en la **wiki del grupo** [Vídeo de ejemplo de una wiki en Moodle: http://www.youtube.com/watch?v=YeYPC4nfjO4], que no es más que una zona web que sólo pueden ver los miembros del equipo y el profesor/a. Posteriormente podremos ver una fotografía. Es evidente que en este tipo de actividades se trabaja, además de la **competencia** matemática, la digital, la lingüística, la social, ... Es una maravilla.

Por otro lado, la calificación del grupo redundará en la calificación individual por lo que se produce un interesante efecto de "ayuda interna a los miembros del grupo con mayores dificultades"...

¡Nada como mezclar las TIC, el Trabajo Cooperativo y los recursos manipulativos!

P2) Sabiendo todo lo que sabes ...

a) ¿Qué cantidad de agua cabría en el depósito anterior si lo llenásemos hasta los 15 cm de altura? Exprésalo en cm^3 y en litros.

b) Si vaciaras 0,5 litros del envase anterior, ¿a qué altura se situaría el nivel del agua?

c) ¿Qué cantidad de agua cabe en una sección horizontal de 1 cm de alto?

d) Estima la altura de un cilindro de radio 7 cm y volumen 3077,2 cm^3.

e) Estima el radio de un cilindro de altura 30 cm y 3,390 litros de capacidad máxima.

(Sería muy interesante que comprobaras experimentalmente los resultados de a, b y c)

COMENTARIO: En la foto podemos ver a un alumno comprobando experimentalmente los resultados. La satisfacción personal del alumnado se ve multiplicada, y la del docente al ver sus caras. En cuanto al apoyo virtual, las wikis se pueden ver complementadas con los **foros** [Vídeo de ejemplo de un foro: http://www.youtube.com/watch?v=wPhCRrJs8CU], donde el alumnado puede plantear soluciones a los problemas o dudas a la totalidad de la clase... Es como un gran panel público de acceso virtual. En cualquier caso, el trabajo de competencias es automático (matemática, lingüística, social, digital, ...) y, además, se hace posible algo que hasta ahora era INVIABLE: **Debatir y comentar el proceso y solución de una actividad o tarea sin restricciones de tiempo ni espacio**. Todos pueden publicar su método y ver con facilidad el de los demás. ÉSTO ES VITAL e imposible de realizar sin las TIC (de comunicación asíncrona). Ahora una alumna puede publicar su solución a las 15:40 y otro revisarla y enriquecerla a las 20:00... **¡La clase se ha extendido a Internet!**

Pero veamos un ejemplo concreto. A continuación podemos observar un fragmento de un debate (de un **foro**), entre Miguel y Carla, sobre "Fundamentos Teóricos. Manipulación de Fórmulas", que se abrió, a petición de Carla, tras darse cuenta de que no sabía manipular fórmulas matemáticas con soltura:

Re: A6
de miguel navarro jaen - Sunday, 4 de November de 2007, 20:53

Carla ¿qué hiciste en el **b)**?

Mostrar mensaje anterior | Editar | Partir | Borrar | Responder

Re: A6
de Carla Cabrera Suárez - Monday, 5 de November de 2007, 16:33

Vale...vamos por partes (¡qué despistones más grandes tuve por Dios!)

b)

F=¿?

$$\frac{\sqrt{\frac{2\cdot F^2-1}{B}}}{C}=1$$

$$\sqrt{\frac{2\cdot F^2-1}{B}}=1\cdot C$$

$$\frac{2\cdot F^2-1}{B}=(1\cdot C)^2$$

$$2\cdot F^2-1=\left[(1\cdot C)^2\right]\cdot B$$

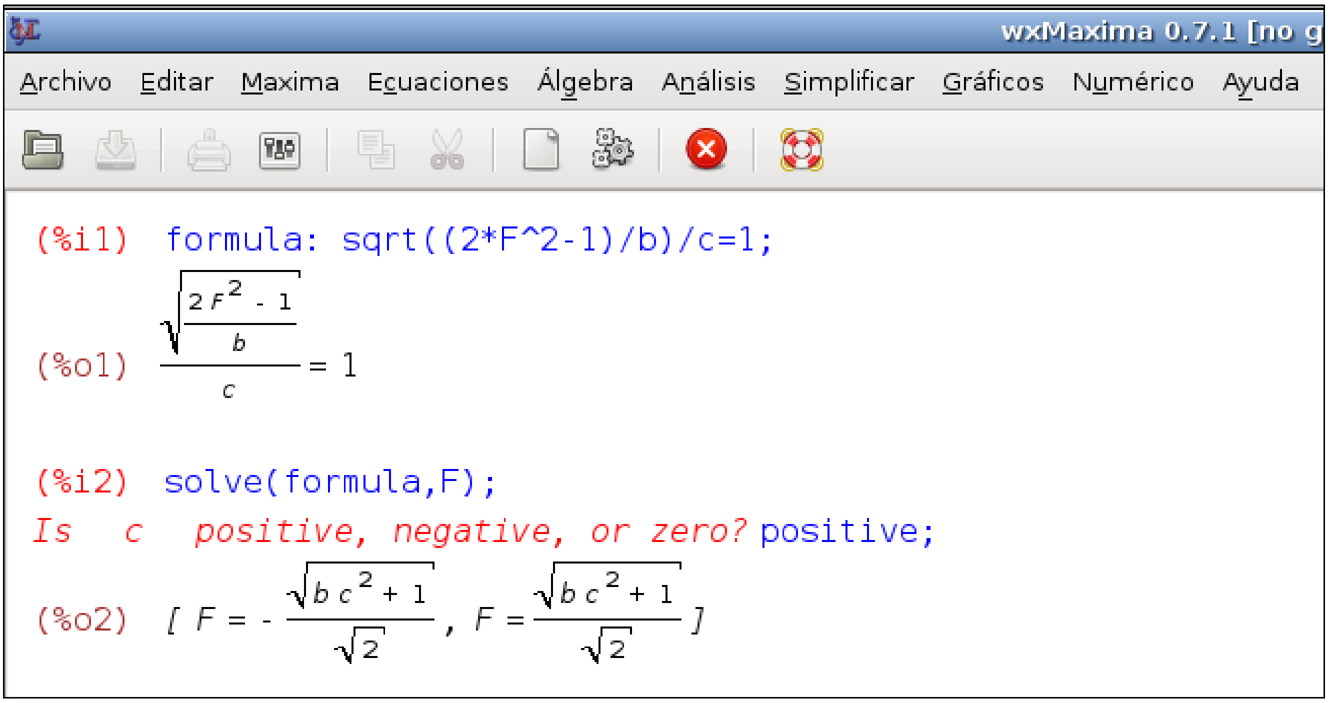
$$2\cdot F^2=\left[\left[(1\cdot C)^2\right]\cdot B\right]+1$$

$$F^2=\frac{\left[\left[(1\cdot C)^2\right]\cdot B\right]+1}{2}$$

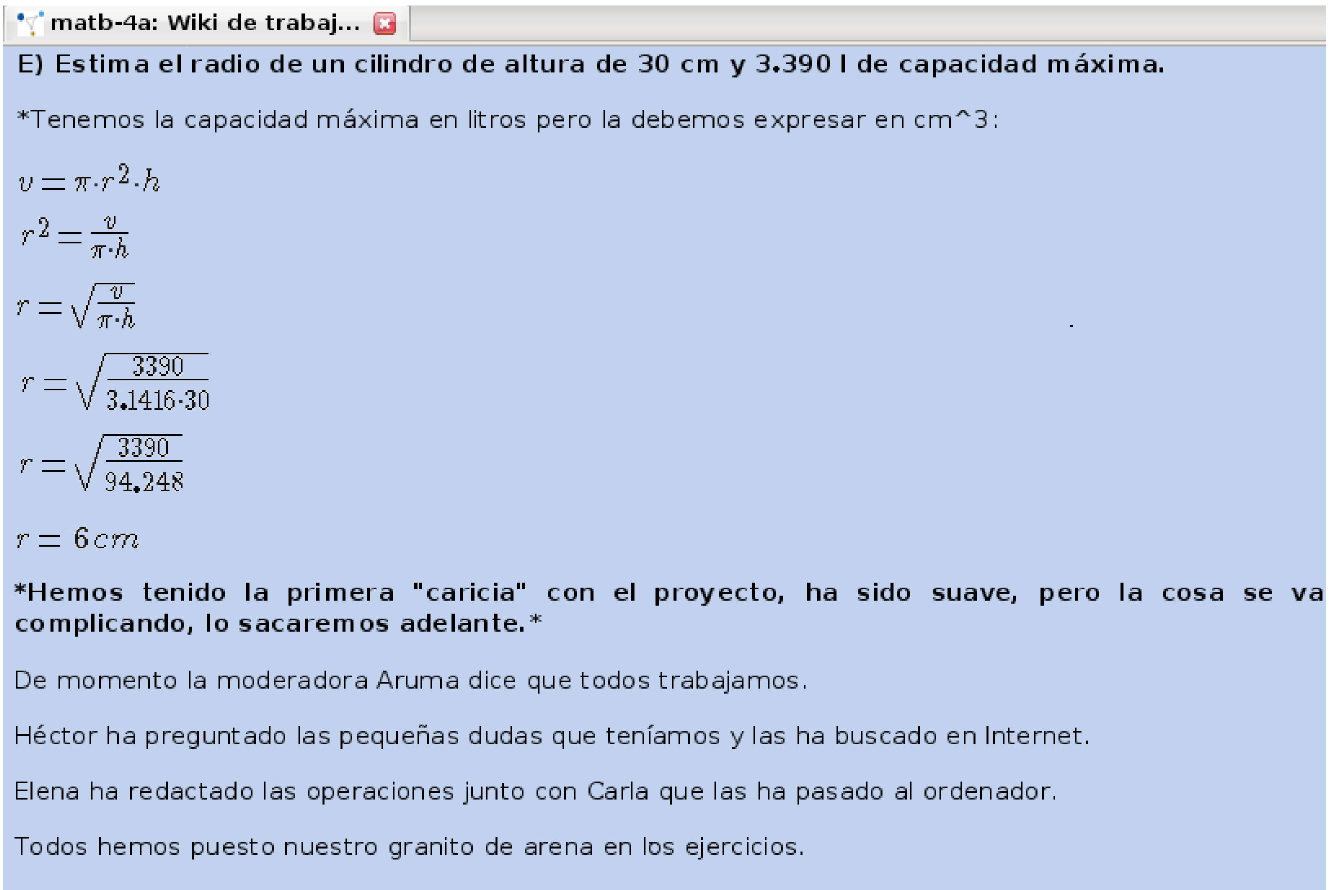
$$F=\sqrt{\frac{\left[\left[(1\cdot C)^2\right]\cdot B\right]+1}{2}}$$

Una cuestión muy interesante que puede surgir en este punto es: **¿Hasta qué nivel debemos profundizar en el fundamento teórico?** Bajo mi punto de vista, sólo hasta el necesario para realizar con éxito el proyecto o, si el alumnado así lo demanda (como fue el caso), hasta que se sientan seguros con la herramienta matemática en cuestión. Hay que destacar que este fundamento teórico o herramienta matemática será empleada en el resto de los proyectos... no sólo en este. Por otro lado, hay que citar que la **duración del Proyecto** depende del momento del curso en el que se ejecute, ya que este dato incidirá directamente en la proporción (Nº de herramientas matemáticas que hay que aprender) / (Nº de herramientas matemáticas que hay que emplear para resolver el proyecto)

Otro aspecto importante es que el alumnado puede comprobar los resultados con el **software MAXIMA o SAGE**. Basta escribir: **formula: sqrt((2*F^2-1)/b)/c=1 y solve(formula, F)**, para obtener el resultado. El proceso, que es la pieza clave, deberá ser realizado en la carpeta de materiales (cuaderno del alumno/a) y en el foro, para compartirlo con los demás, ver métodos alternativos, fallos típicos...



A continuación podemos ver un fragmento de la **wiki** de uno de los grupos (**fundamental para la construcción colaborativa del conocimiento**):


matb-4a: Wiki de trabaj...

E) Estima el radio de un cilindro de altura de 30 cm y 3.390 l de capacidad máxima.

*Tenemos la capacidad máxima en litros pero la debemos expresar en cm^3:

$v = \pi \cdot r^2 . h$

$r^2 = \frac{v}{\pi \cdot h}$

$r = \sqrt{\frac{v}{\pi \cdot h}}$

$r = \sqrt{\frac{3390}{3.1416 \cdot 30}}$

$r = \sqrt{\frac{3390}{94.248}}$

$r = 6 cm$

Hemos tenido la primera "caricia" con el proyecto, ha sido suave, pero la cosa se va complicando, lo sacaremos adelante.

De momento la moderadora Aruma dice que todos trabajamos.

Héctor ha preguntado las pequeñas dudas que teníamos y las ha buscado en Internet.

Elena ha redactado las operaciones junto con Carla que las ha pasado al ordenador.

Todos hemos puesto nuestro granito de arena en los ejercicios.

Pero volvamos al Proyecto...

P3) Sabiendo que el depósito vacío y sin tapa pesa 55 gramos. Averigua cuánto pesa un cm² del plástico usado en su construcción. Ten en cuenta que la altura total es de [...] ya que no podemos olvidar el borde final del frasco. Explica detalladamente los pasos realizados. ¿Algo que puntualizar?

P4) Así pues... ¿Cuál es la fórmula del Area Total, A_T, de un frasco cilíndrico sin tapa? ¿De qué variables depende? Despeja la variable "h". ¿Para qué se puede usar esa fórmula?

P5) ¿Se te ocurre alguna actividad o pregunta adicional? Publícalo en el foro...

P6) La **densidad** (d=m/v) de un material es una magnitud referida a la cantidad de masa contenida en un determinado volumen. En la práctica diaria, un objeto pequeño y pesado, como una piedra o un trozo de plomo, es más denso que un objeto grande y liviano, como un corcho o un poco de espuma (Fuente: Wikipedia).

Por ejemplo, la densidad de un objeto de 14 cm³ de volumen y 45 gramos de peso es de d=45/14=3,2143 g/cm³ (aprox.)

Al llenar el depósito de agua se obtiene:

Altura alcanzada por el agua = 23,2 cm.

Peso del depósito + agua = 1670 gramos.

a) Estima la densidad del agua.

b) Averigua la densidad real del agua y justifica el error obtenido (¿Causas del error?). Calcula el error absoluto y el error relativo cometido en el apartado anterior.

P7) Si vertemos cierta cantidad de agua en el depósito (izquierda) y después sumergimos un vaso de cristal vacío (derecha), se obtienen los siguientes datos:

	Antes	Después
Nivel del agua	12 cm	14 cm
Peso total	958 g	1303 g

a) ¿Cuál es la masa del vaso?

b) ¿Cuál es el volumen del vaso?

c) ¿Cuál es la densidad del cristal del vaso?

d) ¿Qué relación tiene este problema con Arquímedes y la expresión "¡Eureka!"?

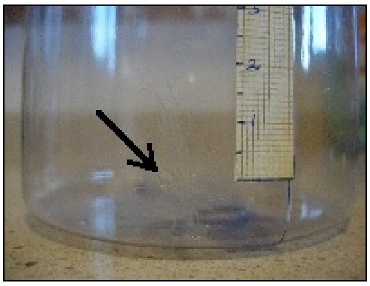
e) Completa las siguientes frases: "El cristal del vaso usado es ____ veces más denso que el agua". "El cristal del vaso es un _____% más denso que el agua".

¡Lo comprobaremos en clase!

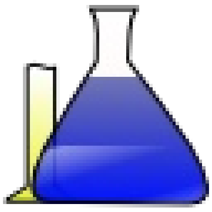
FASE 2: Observando el fenómeno de vaciado de un depósito cilíndrico. Toma de datos. Are you ready?

Empieza la fiesta. Pega una tira de papel milimetrado de 22 cm sobre el lateral del depósito, pegándola al extremo inferior del borde superior. Practica un orificio de 2 mm de diámetro a la altura 0 cm y lima cuidadosamente las imperfecciones generadas. No deben quedar restos de plástico que dificulten la posterior salida del agua.

Observa el siguiente vídeo: [**http://www.youtube.com/watch?v=Cenzk1notJQ**]. Ése será el comienzo de nuestro estudio... Llena el envase (podría ser otro) hasta la altura máxima de 22 cm (en la escala). Destapa el orificio y deja que el agua vaya saliendo. Pon en marcha el cronómetro cuando el nivel del agua llegue a 21 cm, así evitaremos los problemas de sincronización inicial y obviaremos el proceso de puesta en marcha del fenómeno (aceleración del sistema).



P8) Junto a tus compañeros/as, realiza la siguiente toma de datos. Sería conveniente dividir el trabajo entre los miembros del grupo (medidor/a de tiempo, medidor(es) de altura, anotador/a).



Contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Sale el agua siempre a la misma velocidad?

b) ¿De qué forma influye la altura del nivel del agua en la velocidad de salida? ¿A qué crees que es debido?

c) ¿Qué relación crees que existe entre las variables "velocidad de descenso del nivel del agua (cm/s)", "altura o nivel del agua (cm)" y "caudal de salida (cm^3/s)"? Trata de explicarlo de forma cualitativa (con palabras).

d) ¿A qué velocidad media desciende el nivel del agua de los 21 a los 20 cm? ¿Y de los 7 a los 6 cm?

t (s)	**h (cm)**
0	21
	20
	19
	18
	17
	16
	15
	14
	13
	12
	11
	10
	9
	8

¡Bienvenidos a la Ciencia! La Matemática es la base.		7
		6
		5
		4
		3
		2
		1

P9) ¿Cuáles han sido las principales fuentes de error en los procesos de toma de datos? ¿Qué otras fuentes de error nos solemos encontrar en cualquier trabajo científico/matemático?

COMENTARIO: ¡Este día fue magnífico! ¡Qué nervios! Eramos todos auténticos científicos/as en pleno trabajo: tomando notas, planteando hipótesis, ...

FASE 3: Representar gráficamente los datos obtenidos. ¿Has escuchado alguna vez la frase "Una imagen vale más que mil palabras"? Por algo será. Pasar a una representación gráfica puede ayudarnos a entender mejor el fenómeno y darnos pistas sobre cómo seguir el estudio.

P10) Representa los datos recogidos en la tabla anterior en un diagrama cartesiano "h-t". Usa papel milimetrado. ¿Qué forma tiene? ¿Mantiene una forma recta o curva? ¿Qué conclusiones extraes? Piensa detenidamente qué escala usar...

The Open Source
Office Suite
Open
Office

P11) Crea una hoja de cálculo con los datos de la tabla anterior. Genera un gráfico del tipo nube de puntos (X-Y Dispersión). En nuestro caso usaremos la hoja de cálculo de OpenOffice, ya que es software libre. ¡Y debemos educar en valores!

COMENTARIO: En este punto es tan importante el trabajo manual, con el papel milimetrado, como el informático, con la hoja de cálculo de OpenOffice.

FASE 4: Ha llegado la hora de elaborar nuestra primera hipótesis. ¿Qué está ocurriendo? ¿Seremos capaces de encontrar una fórmula matemática que "modele" el fenómeno y que permita estimar la altura conocido el tiempo o el tiempo conocida la altura? ¡Ahora empieza lo fuerte!

¿Y si fuéramos capaces de comprender los conceptos físicos que hay detrás del fenómeno? ¿Y si fuéramos capaces de deducir la fórmula matemática que relaciona las variables en juego? A veces esto puede ser complicado... En esta temprana etapa de nuestra "vida científica" empezaremos dándole un enfoque alternativo: **¿Seremos capaces de encontrar una fórmula matemática que se ajuste a los datos obtenidos?**

Las alternativas son muchas: **afines/lineales, cuadráticas, racionales, exponenciales**, ...

P12) ¿Puede realmente ser una función afín o lineal la que modele el fenómeno?

Probaremos con una **Función Racional**. En general, las funciones racionales se definen como el cociente de dos polinomios P(x)/Q(x), siendo Q(x) no nulo: $y=\frac{5}{x+1}$, $y=\frac{3x^2-8}{7+6x}$, ...

P13) Usa **SAGE** (**www.sagenb.org**) o **MAXIMA** para dibujar las siguientes gráficas:

Función	**Instrucciones SAGE**
$f(x)=\frac{3x+21}{2x+10}$	f(x)=(3*x+21)/(2*x+10) f.plot(-15,15) Probemos ahora a hacer un zoom de esa extraña zona... f.plot(-15,15).show(ymin=-10,ymax=10) ¿Mejor, no?
$f(x)=\frac{2x+21}{x^2+1}$	f(x)=(2*x+21)/(x^2+1) f.plot(-15,15) ¿Qué opinas?

¿Qué conclusiones extraes? ¿Podríamos aprovechar algún trozo para ajustarlo a nuestra curva? Jugaremos un poco con estas funciones en la sección de "Fundamentos Teóricos: Introducción a las Funciones Racionales".

P14) Ahora que conoces este tipo de funciones, trata de ajustar el siguiente modelo racional a la nube de puntos obtenida tras la observación. ¿Qué herramienta matemática crees que hay que usar para averiguar los valores de los parámetros "a", "b" y "c"?

Modelo o Función base	**Parámetros a ajustar**	**Función resultante**
$f(x)=\frac{ax+b}{cx+1}$	a, b, c	

P15) Usa **SAGE o MAXIMA** para averiguar los parámetros a,b,c. Ya sabes un método rápido para resolver sistemas...

Ejemplo Sistema	Instrucciones SAGE
3a+5b+c = 8 4a-2b-5c = 2 4a-7b+9c = -3	var('a b c') ec1 = 3*a+5*b+c == 8 ec2 = 4*a-2*b-5*c == 2 ec3 = 4*a-7*b+9*c == -3 solve([ec1,ec2,ec3],a,b,c)

P16) Representa gráficamente, en papel milimetrado, dichas funciones sobre la nube de puntos original de forma que se aprecie con claridad hasta qué punto son buenos modelos. Usa diferentes colores.

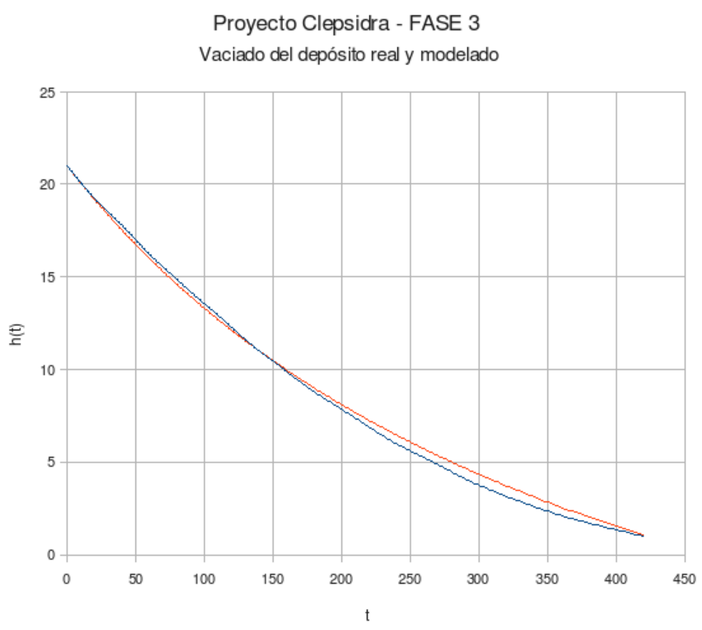
P17) Apliquemos las nuevas tecnologías. Verás que, además, nos permitirá realizar unos cálculos muy interesantes de forma rápida... Usa una hoja de cálculo, preferentemente OpenOffice Calc, para realizar la representación gráfica anterior. Además, añade dos columnas de datos adicionales que muestren el error absoluto y relativo cometido por los modelos en cada uno de los puntos estudiados. Ver vídeo adicional.

P18) Calcula el error medio y la desviación típica para cada modelo de estimación. Hazlo también con la hoja de cálculo.

P19) ¿Nos vale este modelo?

COMENTARIOS: Tratar con las funciones racionales nos llevó a contenidos que en un principio no pensaba abordar... Pero la idea de límite surgió rápidamente y, cómo no, ya que estábamos: ¿y si vemos cómo calcular los límites con t→INF? Y lo vimos... y les gustó, sobre todo cuando se dieron cuenta de que ya eran capaces de enfrentarse a pruebas tipo P.A.U. de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II (con sistemas de 3x3 y problemas de funciones racionales con límites incluidos). Toda esta época fue eficazmente reforzada con un intenso trabajo en los **foros** donde, entre todos ellos/as, resolvieron y construyeron toda una batería de problemas resueltos de diferentes niveles de complejidad sobre sistemas de ecuaciones y funciones racionales ... Pero volvamos rápidamente al proyecto: la función encontrada fue $h(t)=\frac{-0{,}045\,t+21}{0{,}0024\,t+1}$ y, claramente, proporcionaba una "burda" aproximación del fenómeno... A continuación se presenta la hoja de cálculo realizada por uno de los grupos, con t, h real (en cm), h modelo-racional, error absoluto y error relativo.

t	h(t)	hr(t)	Ea	Er
0	21	21	0	0
11	20	19,98	0,02	0,11
23	19	18,92	0,08	0,42
37	18	17,76	0,24	1,34
50	17	16,74	0,26	1,52
63	16	15,78	0,22	1,38
78	15	14,73	0,27	1,79
93	14	13,75	0,25	1,81
109	13	12,76	0,24	1,86
124	12	11,88	0,12	0,97
140	11	11	0	0,03
158	10	10,07	0,07	0,71
176	9	9,2	0,2	2,17
197	8	8,24	0,24	2,99
218	7	7,35	0,35	4,95
240	6	6,47	0,47	7,87
267	5	5,48	0,48	9,52
293	4	4,59	0,59	14,71
326	3	3,55	0,55	18,38
366	2	2,41	0,41	20,58
420	1	1,05	0,05	4,58
		MEDIA	0,24	4,65



Probaremos ahora con un tipo especial de **<u>Función Polinómica</u>, $f(x)=P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$. La <u>Función Cuadrática</u>**, $f(x)= a_2x^2+a_1x+a_0$, también conocida como $f(x)=ax^2+bx+c$.

P19) Repite el proceso anterior usando este modelo. Compara los resultados.

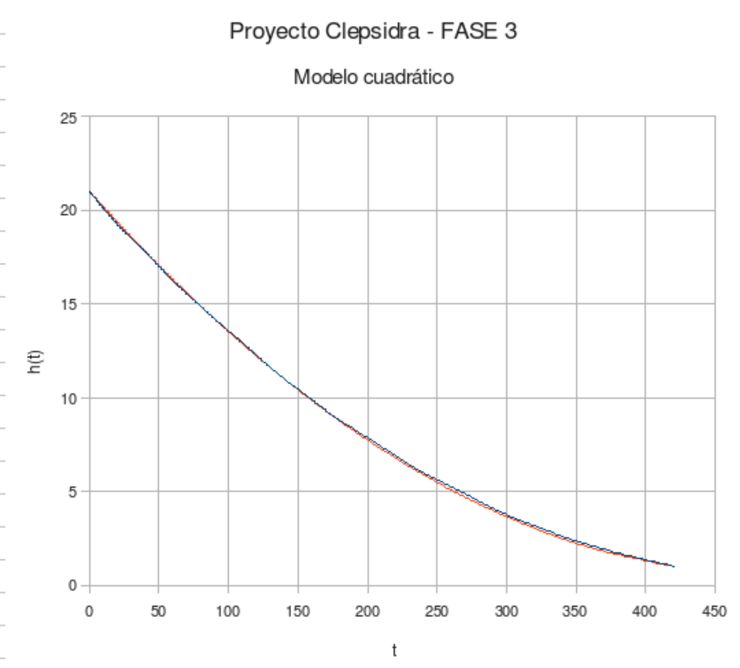
COMENTARIO: ¡Genial! Los chicos/as descubrieron que se ajustaba a un modelo cuadrático y que el error cometido era prácticamente despreciable... ¡Qué satisfacción! Era la primera vez que MODELABAN la realidad. No faltaron las llamadas telefónicas de varias madres y padres. ¡No era para menos, hasta yo estaba emocionado! En cuanto al modelo cuadrático, nos apoyamos en los pares (t,h): (0,21), (140,11) y (420,1), obteniendo: $h(t)=0{,}000085t^2-0{,}083333t+21$ (cm). ¡Y qué bien se sentían los chicos/as!

Al igual que en la fase anterior, el alumnado tuvo que recurrir a los fundamentos teóricos de “Funciones Cuadráticas” y de “Ecuaciones de segundo grado”.

Terminábamos así nuestra fase científica y se abría la fase ingenieril... ¡Construyamos un reloj de agua!

A continuación podemos observar los resultados obtenidos por los chicos/as con el modelo cuadrático y que tanto dio que hablar en el centro...

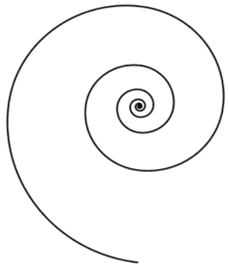
t	h(t)	hc(t)	Ea	Er
0	21	21	0	0
11	20	20,09	0,09	0,47
23	19	19,13	0,13	0,68
37	18	18,03	0,03	0,18
50	17	17,05	0,05	0,27
63	16	16,09	0,09	0,55
78	15	15,02	0,02	0,11
93	14	13,99	0,01	0,11
109	13	12,93	0,07	0,56
124	12	11,97	0,03	0,22
140	11	11	0	0,01
158	10	9,96	0,04	0,45
176	9	8,97	0,03	0,37
197	8	7,88	0,12	1,47
218	7	6,87	0,13	1,82
240	6	5,9	0,1	1,73
267	5	4,81	0,19	3,81
293	4	3,88	0,12	2,99
326	3	2,87	0,13	4,44
366	2	1,89	0,11	5,68
420	1	0,99	0,01	0,59
	MEDIA DEL ERROR		0,07	1,26



COMENTARIOS: La **fase ingenieril** fue la guinda del pastel. En ella, el alumnado construyó una nueva escala en la que cada división o marca se correspondía con un intervalo de tiempo de 20 segundos. Para hacerlo, simplemente recurrieron al modelo $h(t)=0{,}000085t^2-0{,}083333t+21$, sustituyendo t=0, 20, 40, ... La puesta en escena fue fantástica... En cuanto al **trabajo final del proyecto**, cada grupo tuvo que repetir el proceso completo, apoyándose en software matemático (MAXIMA, SAGE y OpenOffice Calc), pero con un **depósito distinto**, construyendo así su propio reloj de agua, acompañado del correspondiente **informe científico-técnico** del fenómeno de vaciado. Su presentación en el centro está prevista para el 12 de mayo, Día Escolar de las Matemáticas.

4. Conclusión Final

Parece mentira pero ya hemos llegado a las 20 páginas... Son muchas cosas las que no se han mostrado: pruebas de grupo, cuestionarios, trabajo masivo en foros y wikis, ... Pero creo que las ideas principales se han transmitido:



- La **Metodología por Proyectos** nos proporciona el cambio clave en nuestro quehacer diario en el aula. Ya sean Proyectos de Análisis de Fenómenos o Procesos (Clepsidra, AgroMAT, ...), Proyectos de Aventuras Guiadas (Tunguska, ViruX, ...), Proyectos de Construcción de Mecanismos (TopoGIC, CannonBasket, ...), ... La actividad en el aula debe estar guiada por una situación problemática real o simulada. ¡La Matemática es útil y maravillosa!

- Las **TIC** pueden ayudar enormemente tanto como soporte del **trabajo colaborativo y cooperativo** con Wikis y Foros (y Blogs si no disponemos de **Moodle**), como un mecanismo eficiente de **Atención a la Diversidad**.

- El **Software Libre** Específico de Matemáticas (MAXIMA, SAGE, ...) y el Genérico de Ofimática (OpenOffice) puede integrarse en el aula tal y como lo haría en un entorno real de investigación científico-matemático. Por tanto, no se hace un uso académico del mismo sino que se reproduce su uso real, lo cual es un detalle a tener muy en cuenta.

- Los **materiales manipulables** o, simplemente, los **objetos reales** deben estar presentes en el aula. El Profesorado de Idiomas habla de "**Realia**" para referirse a esta misma idea... El alumnado debe medir, comprobar, experimentar, ... y, posteriormente, construir modelos matemáticos y extraer conclusiones.

- Si queremos que nuestros alumnos/as disfruten con la Matemática, debemos transmitirles y **DEMOSTRARLES** lo que es en realidad: **¡La Reina de las Ciencias!**